# ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

## по дисциплине «Математика»

**дата 07.12.23**

## Тема «Численное дифференцирование»

**Продолжаем конспект прошлого урока в рабочей тетради!!!**

**Пример 2.**

Построить таблицу разностей функции $y=f(x)$, заданной таблично:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 140 |

**Решение:** Вычислим конечные разности первого порядка:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 5 - 1 = 4,$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 15 - 5 = 10,$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 35 - 15 = 20,$

$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 70 - 35 = 35,$

$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 140 - 70 = 70.$

Полученные значения разностей первого порядка занесем в столбец *Ay* таблицы разностей.

Определим конечные разности второго порядка:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 10 - 4 = 6,$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 20 - 10 = 10,$

$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 35 - 20 = 15,$

$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 70 - 35 = 35.$

Результаты заносим в столбец $\Delta^2 y$.

Конечные разности третьего порядка:

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 10 - 6 = 4,$

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 15 - 10 = 5,$

$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = 35 - 15 = 20.$

Заполним столбец $\Delta^3 y$.

Конечные разности четвертого порядка:

$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 5 - 4 = 1,$

$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 = 20 - 5 = 15.$

Заполним столбец $\Delta^4 y$.

Конечная разность пятого порядка:

$\Delta^5 y_0 = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0 = 15 - 1 = 14.$

Таким образом, таблица разностей для заданной функции имеет вид:

| $i$ | $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 14 |
| 1 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 15 | |
| 2 | 2 | 15 | 20 | 15 | 20 | | |
| 3 | 3 | 35 | 35 | 35 | | | |
| 4 | 4 | 70 | 70 | | | | |
| 5 | 5 | 140 | | | | | |

**Пример 3**

Найти производную функции $y = \lg x$, заданной таблично в точке $x = 30$.

Значения функции $y = \lg x$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 30 | 1,4771 |
| 35 | 1,5441 |
| 40 | 1,6021 |
| 45 | 1,6532 |
| 50 | 1,6990 |

**Решение:**

Здесь шаг $h$= 5. Вычислим конечные разности различных порядков по формулам:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ =1,5441–1,4771 = 0,067,

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$ =1,6021–1,5441 = 0,058,

$\Delta y_2 = y_3 - y_2$ =1,6532 –1,6021 = 0,0511,

$\Delta y_3 = y_4 - y_3$ =16990 –1,6532 = 0,0458.

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ = 0,058 - 0,067 = -0,009,

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$ = 0,0511 – 0,058 = -0,0069,

$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$ = 0,0458 - 0,0511 = -0,0053.

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$ = -0,0069 + 0,009 = 0,0021,

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$ = -0,0053+0,0069 = 0,0016.

$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$ = 0,0016 – 0,0021 = -0,0005.

Заполним таблицу разностей:

| $i$ | $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 30 | 1,4771 | 0,0670 | –0,0090 | 0,0021 | –0,0005 |
| 1 | 35 | 1,5441 | 0,0580 | –0,0069 | 0,0016 | |
| 2 | 40 | 1,6021 | 0,0511 | –0,0053 | | |
| 3 | 45 | 1,6532 | 0,0458 | | | |
| 4 | 50 | 1,6990 | | | | |

По формуле (3), используя первую строчку таблицы, с точностью до разностей четвертого порядка, получаем:

$$y'(30) = \frac{1}{5}\left(0{,}067 + \frac{0{,}0090}{2} + \frac{0{,}0021}{3} + \frac{0{,}0005}{4}\right)$$

$y'(30) = 0{,}0145$.

Оценим точность найденного значения. Заданная таблично функция есть $y = lgx$. Производная этой функции:

$$y' = \frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x} \quad .$$

При $x = 30$ получим:

$$y'(30) = \frac{0{,}4343}{30} \approx 0{,}0145.$$

Таким образом, результаты совпали с точностью до четвертого десятичного знака.

**Пример 4**

Найти значения первой и второй производных функции, заданной таблично, в точке $x$=2,7.

| x | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2,857 | 3,946 | 4,938 | 5,801 | 6,503 | 7,010 | 7,288 | 7,301 |

**Решение:**

Составим таблицу конечных разностей заданной функции:

| i | x | y | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,8 | 2,857 | 1,089 | -0,097 | -0,032 | 0 |
| 1 | 1,2 | 3,946 | 0,992 | -0,129 | -0,032 | -0,002 |
| 2 | 1,6 | 4,938 | 0,863 | -0,161 | -0,034 | 0 |
| 3 | 2,0 | 5,801 | 0,702 | -0,195 | -0,034 | -0,002 |
| 4 | 2,4 | 6,503 | 0,507 | -0,229 | -0,036 | |
| 5 | 2,8 | 7,010 | 0,278 | -0,265 | | |
| 6 | 3,2 | 7,288 | 0,013 | | | |
| 7 | 3,6 | 7,301 | | | | |

В данном примере точка, в которой нужно вычислить производные, не является узловой, т.е. значение функции в этой точке не задано. В таком случае следует воспользоваться формулами (2)(п. 4):

$$y' = \frac{1}{h}\left(\Delta y_o + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right)$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

Ближайшая к $x$ = 2,7 меньшая точка, в которой известно значение функции $x$ = 2,4. Поэтому положим $x_0$ = 2,4.

Тогда $q = \dfrac{2{,}7-2{,}4}{0{,}4} = 0{,}75$.

Подставляем в формулу первой производной функции:

$$y'(2{,}7) = \frac{1}{0{,}4}\left(0{,}507 + \frac{2\cdot 0{,}75-1}{2}\cdot(-0{,}229) + \frac{3\cdot(0{,}75)^2 - 6\cdot 0{,}75+2}{6}\cdot(-0{,}036)\right) \approx 1{,}137$$

Втораяпроизводная функции:

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right)$$

$$y''(0{,}27) = \frac{1}{(0{,}4)^2}\left(-0{,}229 + (0{,}75-1)\cdot(-0{,}036)\right) \approx -1{,}375$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru